

Delimičan problem sop. vrednosti (specijalni slučajevi)

- ⊛ Metodom skalarnog proizvoda, sa tačnošću 10^{-3} naći λ_1 počevši od $v_0 = [1, 0, 0]^T$ za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

! Sopstvene vrednosti matrice A su: $\lambda(A) = \{1, 2, 3\}$,
 o Lali primenom metode dobija se sledeće:

iter (k)	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$\frac{v_1^{(k)}}{v_1^{(k-1)}}$	$\frac{v_2^{(k)}}{v_2^{(k-1)}}$	$\frac{v_3^{(k)}}{v_3^{(k-1)}}$
0	1	0	0	—	—	—
1	1	-1	-1	1	—	—
2	1	-3	-3	1	3	3
3	1	-7	-7	1	2.3333	2.3333
4	1	-15	-15	1	2.1429	2.1429
⋮						
10	1	-1023	-1023	1	2.0020	2.0020

ne postoji konvergencija
(sve tri iste vrednosti)

Takođe, $\lambda_1(A) \neq 2$, $\lambda_1(A) \neq 1$

Isti zadatak, ali počevši od nekog drugog v_0 ,

u pr. $v_0 = [2, 0, 1]^T$:

iter (k)	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$\frac{v_1^{(k)}}{v_1^{(k-1)}}$	$\frac{v_2^{(k)}}{v_2^{(k-1)}}$	$\frac{v_3^{(k)}}{v_3^{(k-1)}}$
0	2	0	1	—	—	—
1	4	0	3	2	—	3
2	10	2	11	2.5	—	3.6667
3	28	12	39	2.8	6	3.5455
:				:	:	:
7	2188	1932	4119	2.9973	3.2093	3.0947
:	:	:	:	:	:	:

konvergira ka: $[3, 3, 3]$

$\Rightarrow \lambda_1(A) = 3$



Zašto se ovo dešava?

Ako su x_1, x_2, x_3 sop. vektori koji odgovaraju $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
i ako za početni vektor izaberemo $v_0 = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3$
metoda će konvergirati ka λ_1 samo ako je $d_1 \neq 0$!

U ovom primeru s. vrednosti i odgovarajući s vektori su.

$$\lambda_1 = 3, \quad x_1 = [1, 1, 2]^T$$

$$\lambda_2 = 2, \quad x_2 = [0, 1, 1]^T$$

$$\lambda_3 = 1, \quad x_3 = [1, 1, 1]^T$$

Odabirom $v_0 = [1, 0, 0]^T$ dobijamo sistem

$$v_0 = d_1 \cdot x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3$$

fj.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} d_1 + d_3 = 1 \\ d_1 + d_2 + d_3 = 0 \\ 2d_1 + d_2 + d_3 = 0 \end{array} \right\} \underline{d_1 = 0}, d_2 = -1, d_3 = 1$$

!

Problem je u tome što ove situacije ne možemo unapred da utvrdimo jer NE ZNAMO $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ kao ni x_1, x_2, x_3 .

Jedino šta možemo jeste da pratimo vrednosti kroz iteracije i ukoliko primetimo da nema konvergencije da promenimo v_0 .

Isti zadatak ali počevši od $v_0 = [1, 1, 1]^T = x_3$

iter (k)	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$\frac{v_1^{(k)}}{v_1^{(k-1)}}$	$\frac{v_2^{(k)}}{v_2^{(k-1)}}$	$\frac{v_3^{(k)}}{v_3^{(k-1)}}$
0	1	1	1	/	/	/
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1

konvergencija postoji 
ali ne ka $\lambda_1 = 3$, nego $\lambda_3 = 1$

Zašto se ovo dešava?

Krenuli smo od s.vektora za $\lambda_3 = 1$.

Postavimo opet sistem $v_0 = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3$:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 + d_3 = 1 \\ d_1 + d_2 + d_3 = 1 \\ 2d_1 + d_2 + d_3 = 1 \end{array} \right\} \underline{d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 1}$$

▽
o

Ovo je mnogo teže moći zato što konvergencija postoji, ali ka pogrešnoj vrednosti.

Šta je "rešenje" problema? (programerski)

Krenuti od nekog slučajnog vektora, necelobrojnog, zaokružiti vrednosti na određen broj decimala. U praksi se u takvim slučajevima usled RAČUNSKE GREŠKE koju tako pravimo pojavi komponenta $\frac{V_i^{(k)}}{V_i^{(k-1)}}$ koja se "odlepi" od odgov. komponente s. vektora.

Na primer: birati $v_0 = \text{rand}(n, 1)$ ili

$$v_0 = \text{round}(\text{rand}(n, 1), 4)$$

⊛ Odrediti λ_1 za matricu

```
>> A = [-12.2 -34.4 -89.6; 15.6 36.2 80.8; -6 -12 -23]
```

```
A =
```

```
-12.2000 -34.4000 -89.6000
 15.6000  36.2000  80.8000
 -6.0000 -12.0000 -23.0000
```

! Sopstvene vrednosti ove matrice su $\lambda(A) = \{-5, 1, 5\}$

Primerom metode, počevši od bilo kog $v_0 \neq x_1, x_2, x_3$ (što ne znamo unapred) ^{nikakva} konvergencija neće postojati.

iter (k)	$V_1^{(k)}$	$V_2^{(k)}$	$V_3^{(k)}$	$\frac{V_1^{(k)}}{V_1^{(k-1)}}$	$\frac{V_2^{(k)}}{V_2^{(k-1)}}$	$\frac{V_3^{(k)}}{V_3^{(k-1)}}$
0	1	1	1	/	/	/
1	-136	132	-41	-136	-132	-41
2	773.8	-637.4	169	-5.6814	-4.8069	4.1220
3	-2656.2	2652.6	-881	-3.4327	-4.1616	-2.130
4	2093.8	-16597.4	4369	-7.564	-6.2570	-4.9591
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

nikakva konvergencija
ne postoji (čak ni
prema $\lambda_i \neq \lambda_1$)

Zašto?

Ovo je slučaj $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 5$.

Najveća po modulu s.vrednost nije jedinstvena
(što je takođe uslov za konvergenciju).

U tom slučaju se posmatra A^2 umesto A :
biće $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V_j^{(k)}}{V_j^{(k-1)}} = \lambda_1^2$

Otkradite sami taj slučaj.

Napomena: Komponente $V_1^{(k)}$, $V_2^{(k)}$, $V_3^{(k)}$ predstavljaju koordinate odg. s.vektora. U prethodnom primeru te vrednosti se značajno uvećavaju kroz iteracije. Da bi rešili taj problem u svakom trenutku možete "resetovati" metodu tako što ćete taj vektor normirati, jer pravac s vektora ostaje isti.

iter k	$V_1^{(k)}$	$V_2^{(k)}$	$V_3^{(k)}$	$\frac{V_1^{(k)}}{V_1^{(k-1)}}$	$\frac{V_2^{(k)}}{V_2^{(k-1)}}$	$\frac{V_3^{(k)}}{V_3^{(k-1)}}$
4	20093,8	-16597,4	4369	-7.564	-6.2570	-4.9591
normirano $v / \text{norm}(v)$	<u>0.7604</u>	<u>-0.6281</u>	<u>0.1653</u>	nema smisla računati		
5	-2.4845	2.4844	-0.8280	-3.2675	-3.9556	-5.0082
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			

Napomena: Brzina konvergencije zavisi od odnosa $|\lambda_{\min}|$ i $|\lambda_{\max}|$.

Primer. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 10$ $\lambda_2 = -1$ $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = 10$ brzo konvergira jer veliko

$A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 10$ $\lambda_2 = -9$ $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = 1.11$ sporo konvergira jer je malo